

Inhalt

Extremwerte mit Nebenbedingungen.....	1
Eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen für den 2-dimensionalen Fall.....	1

Extremwerte mit Nebenbedingungen

Eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen für den 2-dimensionalen Fall

Für die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ sollen Extremwerte bestimmt werden;
die Nebenbedingung lautet: $x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$

Lösung der Aufgabe:

(1) Man bilde die Lagrangefunktion $L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$
 $g(x_1, x_2) = 0$ ist die Nebenbedingung, in diesem Fall ist $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4$

(2) Man bestimme die Lösungen (x_1, x_2, λ) des Gleichungssystems

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

d.h. man bestimmt Lösungen der Gleichung

$$\text{grad}L(x_1, x_2, \lambda) = (0, 0, 0)$$

(3) Hat man die Lösung (x_1, x_2, λ) gefunden, so untersucht man, ob (x_1, x_2) tatsächlich eine Extremstelle ist

Zu (1): $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 4)$

Zu (2): $\text{grad}L = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \frac{\partial L}{\partial \lambda} \right) = (x_2 + 2\lambda x_1, x_1 + 2\lambda x_2, x_1^2 + x_2^2 - 4) = (0, 0, 0)$

Aus (2) folgen die Gleichungen

$$x_2 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$x_1 + 2\lambda x_2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 4$$

Die dritte Gleichung beschreibt einen Kreis mit Radius 2.

Aus der zweiten Gleichung erhält man $x_1 = -2\lambda x_2$.

Zusammen mit der ersten Gleichung folgt $x_2 - 4\lambda^2 x_2 = 0, x_2 = 4\lambda^2 x_2$

Aus der dritte Gleichung folgt zusammen mit $x_1 = -2\lambda x_2$, dass $x_2 \neq 0$ sein muss.

Aus $x_2 = 4\lambda^2 x_1$ folgt dann $1 = 4\lambda^2, \lambda^2 = \frac{1}{4}$.

Damit hat man die Möglichkeiten $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Aus $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ folgt $x_1 = -x_2, 2x_1^2 = 4, x_1^2 = 2$

Aus $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ folgt $x_1 = x_2, 2x_1^2 = 4, x_1^2 = 2$

Auf dem Kreis $x_1^2 + x_2^2 = 4$ ergeben sich als mögliche Lösungen:

$$(x_1, x_2) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), f(x_1, x_2) = -2$$

$$(x_1, x_2) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), f(x_1, x_2) = -2$$

$$(x_1, x_2) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), f(x_1, x_2) = 2$$

$$(x_1, x_2) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), f(x_1, x_2) = 2$$

Da die stetige Funktion auf dem Kreis $x_1^2 + x_2^2 = 4$ Maxima und Minima annimmt, folgt hieraus:

Die Funktion $f(x)$ nimmt in den Punkten $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ein Maximum an, und $f(x)$ nimmt in den Punkten $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ein Minimum an.