Definitheit von Matrizen

Ref. Wikipedia

Eine symmetrische bzw. hermitesche Matrix A ist genau dann positiv definit, falls alle Hauptminoren von A positiv sind.
A ist negativ definit, falls alle Hauptminoren von –A positiv sind. A ist also genau dann negativ definit, wenn die Vorzeichen der Hauptminoren alternieren, d.h. falls alle ungeraden Hauptminoren negativ sind und alle geraden positiv.

Für eine symmetrische 2 x 2 Matrix bedeutet das:
die Matrix B ist negativ definit
<=>
das Element (1,1) ist negativ,
die Determinante der Matrix ist positiv.

Die Matrix B ist positiv definit
<=>
das Element (1,1) ist positiv, die Determinante der Matrix ist positiv.

Bemerkung

die Hesse-Matrix einer Funktion ist symmetrisch. Daher sind die Begriffe „positiv definit" und „negativ definit" darauf anwendbar.

Hauptminoren einer Matrix

Betrachte das Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

A ist eine symmetrische Matrix, denn es gilt
für alle Matrixelemente (aij)= (aji)

Hauptminoren sind

$$\det(1) = 1; \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0; \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = -1$$

Die Bedingungen für positiv definit und negativ definit treffen nicht zu.

Beispiel einer positiv definiten Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel einer negativ definiten Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung über die Eigenwerte

Positiv und negativ definite Matrizen können über ihre Eigenwerte bestimmt werden.

Referenz Wikipedia:

Eine quadratische symmetrische (bzw. hermitesche) Matrix ist genau dann

positiv definit, wenn alle Eigenwerte größer als null sind;
positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte größer oder gleich null sind;
negativ definit, wenn alle Eigenwerte kleiner als null sind;
negativ semidefinit, wenn alle Eigenwerte kleiner oder gleich null sind und
indefinit, wenn positive und negative Eigenwerte existieren.

Beispiel einer indefiniten Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel einer positiv semidefiniten Matrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte einer Matrix, die nur in der Diagonalen von Null verschiedene Elemente besitzt, sind die Elemente in der Diagonalen.

Im allgemeinen Fall können Eigenwerte über die Gleichung det(A – xE) = 0 bestimmt werden.
Es sind die Nullstellen x des charakteristischen Polynoms der Matrix A.
det(A – xE) ist das charakteristische Polynom der Matrix A.

E ist die Einheitsmatrix, x eine reelle Zahl.

Beispiel:

Bestimmung der Eigenwerte der Matrix D.

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & -1-x \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & -1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2(1-x)$$

Das charakteristische Polynom der Matrix D ist $(1-x)^2(1-x)$. Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind x = 1 (zweifach) und x = -1.
Das sind dann auch die Eigenwerte der Matrix D.

Positiv und negativ definite Matrizen werden bei der mehrdimensionalen Extremwertberechnung verwendet.
Sie helfen unter bestimmten Voraussetzungen bei der Entscheidungsfindung, ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt.