Mehrdimensionale Extremwertberechnung

Sei $U \subset R^n$ eine offene Menge, $f : U \to R$ differenzierbar.

(1) hat *f* in $(x_1,...,x_n) \in U$ einen Extremwert, so gilt $gradf(x_1,...x_n) = 0$

Dies ist eine notwendige Bedingung für einen Extremwert

(2) Eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Extremwertes erhält man folgendermaßen:

Betrachte die Matrix $Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & . & . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & . & . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & . & . & f_{x_1 x_n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ f_{x_n x_1} & . & . & f_{x_n x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & . & . & h_{1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ h_{n1} & . & . & h_{nn} \end{pmatrix}$,

die Hesse-Matrix von *f*

(2a) Ist die Bedingung (1) für einen Punkt $(x_1,...x_n)$ erfüllt, d.h. gilt $gradf(x_1,...x_n) = 0$

und ist die Hesse-Matrix *Hf* an einer Stelle $(x_1,...x_n)$ positiv definit,

dann hat f an der Stelle $(x_1,...x_n)$ ein lokales Minimum

(2b) Ist die Bedingung (1) für einen Punkt $(x_1,...x_n)$ erfüllt, d.h. gilt $gradf(x_1,...x_n) = 0$

und ist die Hesse-Matrix *Hf* an einer Stelle $(x_1,...x_n)$ negativ definit,

dann hat f an der Stelle $(x_1,...x_n)$ ein lokales Maximum

Bedingungen für positiv definit, negativ definit

(3) Für den zweidimensionalen Fall gibt es folgende spezielle Bedingung:

Hf ist an der Stelle (x_1,x_2) genau dann positiv definit, wenn $h_{11} > 0$ und det Hf > 0 gilt.

Hf ist an der Stelle (x_1,x_2) genau dann negativ definit, wenn $h_{11} < 0$ und det Hf > 0 gilt.

(4) Der allgemeinen Fall

(4a) Die Matrix Hf ist genau dann positiv definit, wenn det $Hf_k > 0$ für k = 1,…,n gilt.

Dabei ist $Hf_k = \begin{pmatrix} h_{11} & . & . & h_{1k} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ h_{k1} & . & . & h_{kk} \end{pmatrix}$

(4b) Die Matrix Hf ist genau dann negativ definit, wenn für die Vorzeichen von det $Hf_k > 0$ folgendes gilt:

det $Hf_k < 0$, falls k ungerade ist, det $Hf_k > 0$, falls k gerade ist.

Beispiele:.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist negativ definit.