Zahlenfolgen

Inhaltsverzeichnis

1 Beispiele für Zahlenfolgen

1.1 harmonische Folge

$a_n = \frac{1}{n}; n \geq 1; \{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}...$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

1.2 alternierende Folge

$a_n = (-1)^n; n \geq 0; \{a_n\} = 1, -1, 1, -1...$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert nicht.

1.3 rekursive Darstellung einer Folge

$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right); n \geq 1; a_1 = 1$

$a_2 = \frac{3}{2}$

$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right);\ a_3 = \frac{17}{12} = 1,41667$

$a_4 = 1,41422$

Unter der Annahme, dass die Folge a_n gegen einen Grenzwert a^* konvergiert, kann man eine Abschätzung für a^* vornehmen:

$a^* = \frac{1}{2}\left(a^* + \frac{2}{a^*}\right)$

Es folgt aus der letzten Gleichung $2a^* = \frac{(a^*)^2 + 2}{a^*}$

und hieraus $2(a^*)^2 = (a^*)^2 + 2$, $(a*)^2 = 2; a* = \sqrt{2}$

Den Beweis, dass die Folge tatsächlich gegen $\sqrt{2}$ konvergiert, kann man sich unter dem nachfolgend angegebenen Link angucken. Dieser Beweis ist kein Gegenstand des Tutoriums. Konvergenz gegen Wurzel aus 2

1.4 arithmetische Folge

$a_{n+1} - a_n = d; n \geq 0$. d ist eine konstante reelle Zahl.

Beispiel: $a_0 = 2; a_1 = 4; a_2 = 6; a_3 = 8...$, es folgt $a_{n+1} - a_n = 2$

1.5 geometrische Folge

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q; n \geq 0; a_0 \neq 0; q > 0$

Beispiel

$a_0 = 2; a_1 = 4 \Rightarrow \frac{a_1}{a_0} = 2;$

$a_2 = 8, a_3 = 16..., \frac{a_2}{a_1} = 2, \frac{a_3}{a_2} = 2$

$a_n = 2^{n+1}; n \geq 0$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+2}}{2^{n+1}} = 2$

$q = 2$

2 Grenzwertsätze

Im folgenden wird angenommen, dass für alle Folgengrenzwerte n gegen ∞ strebt.

2.1 GS 1: $a_n \to a$ und $b_n \to b$, $a_n + b_n \to a + b$, $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

Die Folge $\{a_n\}$ konvergiere gegen eine reelle Zahl a und die Folge $\{b_n\}$ konvergiere gegen eine reelle Zahl b. Dann konvergiert die Folge $\{a_n + b_n\}$ gegen den Grenzwert $a + b$ und die Folge $\{a_n \cdot b_n\}$ gegen den Grenzwert $a \cdot b$.

Beispiele: $3 + \frac{2}{n}; \frac{6}{n}$

$a_n = 3, b_n = \frac{2}{n}$

$a_n + b_n = 3 + \frac{2}{n}; a_n \cdot b_n = \frac{6}{n}$

$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n; a = 3; b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n; b = 0$

$a + b = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n); a + b = 3$

$a \cdot b = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n); a \cdot b = 0$

2.2 GS 2: $a_n \to a$ und $b_n \to b$, $b \neq 0$, $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

Falls die Folge $\{a_n\}$ gegen einen Grenzwert a und die Folge $\{b_n\}$ gegen einen Grenzwert $b \neq 0$ konvergiert, dann konvergiert die Folge $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ gegen den Grenzwert $\frac{a}{b}$

Beispiel: $\frac{3 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n}}$

$a_n = 3 + \frac{2}{n}, b_n = 1 + \frac{3}{n}$

$3 + \frac{2}{n}$ konvergiert gegen 3; $a = 3$

$1 + \frac{3}{n}$ konvergiert gegen 1; $b = 1$

Hieraus folgt

$\frac{3 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n}}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b} = 3$

2.3 GS 3: $a_n \to \infty$ und $b_n \to b$, $a_n + b_n \to \infty$

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
Falls $\{b_n\}$ gegen eine reelle Zahl b konvergiert, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$

Beispiel:
$a_n = 4n, b_n = \frac{8}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} 4n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8}{n} = 0;\ b = 0$

es folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$

2.4 GS 4: $a_n \to \infty$ und b_n gegen $b \neq 0$, $a_n \cdot b_n$

Die Produktfolge $\{a_n \cdot b_n\}$ konvergiert gegen $+\infty$, falls $b > 0$ ist und gegen $-\infty$, falls $b < 0$ ist.

Beispiel: $(1 + n)\left(-3 + \frac{1}{n}\right)$
$a_n = 1 + n, b_n = \left(-3 + \frac{1}{n}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = -3;\ b = -3$
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty$

Nachrechnen:

$(1 + n)(-3 + \frac{1}{n}) = -3 - 3n + \frac{1}{n} + 1$ konvergiert gegen $-\infty$

2.5 GS 5: $a_n \to a$, $a \neq 0$, $b_n \to \infty$, $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ mit $a \neq 0$
Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Beispiel: $\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{3+n}$

$a_n = 2 + \dfrac{1}{n}$; $b_n = 3 + n$

$a_n \to 2$; $b_n \to \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$

2.6 GS 6: $a_n \to \infty$ und $b_n \to$b; $b \neq 0$, $\dfrac{a_n}{b_n} \to \infty$

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\{b_n\}$ konvergiere gegen eine reelle Zahl $b \neq 0$.
Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$

Beispiel: $\dfrac{2+n^2}{1+\dfrac{1}{n}}$

$a_n = 2 + n^2$

$b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

$a_n \to \infty$; $b_n \to 1$; $b = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$

2.7 GS 7: $a_n \to a$, $a \neq 0$ und $b_n \to 0$, $\dfrac{a_n}{b_n}$

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und sei $a \neq 0$. Die Folge $\{b_n\}$ konvergiere gegen 0.

Falls $a > 0$ ist gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$

Falls $a < 0$ ist gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -\infty$

Beispiel: $\dfrac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

$a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$

Inhaltsverzeichnis